A N A L I Z A   F U N K C J O N A L N A

WPPT IV

Galowice, 29 marca 2013

Lista 19

Przypomnijmy: funkcja rzeczywista f określona na zbiorze wypukłym jest *afiniczna* jeśli dla dowlnych $p, q > 0$, $p + q = 1$ i x, y z dziedziny spełnia ona $f(px + qy) = pf(x) + qf(y)$. Jeśli spełniona jest tylko nierówność „$\leq$" to funkcję nazywamy *wypukłą*, a jeśli „$\geq$" to *wklęsłą*.

Funkcja rzeczywista $f : X \to \mathbb{R}$ na przestrzeni topologicznej X jest *górnie półciągła* jeśli wszystkie zbiory $\{x : f(x) \geq t\}$ $(t \in \mathbb{R})$ są domknięte. Funkcja f jest *dolnie półciągła* jeśli $-f$ jest górnie półciągła.

ZADANIE 1. Sprawdź, że funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie górnie i dolnie półciągła.

ZADANIE 2. Wykaż, że f jest górnie półciągła wtedy i tylko wtedy, gdy obszar pod wykresem, czyli $\{(x, t) : t \leq f(x)\}$ jest domknięty w $X \times \mathbb{R}$.

ZADANIE 3. Niech X będzie przestrzenią liniowo-topologiczną. Niech f będzie funkcjonałem rzeczywistym ciągłym określonym na przestrzeni $X \times \mathbb{R}$. Udowodnij, że albo $f(x, t)$ nie zależy od drugiej zmiennej (czyli de facto f jest funkcjonałem na X), albo wszystkie *poziomice* tego funkcjonału, czyli zbiory $F_a = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : f(x, t) = a\}$ $(a \in \mathbb{R})$ są wykresami funkcji ciągłych afinicznych $f_a : X \to \mathbb{R}$.

ZADANIE 4. Niech X będzie wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowo-topologicznej. Niech f, g będą funkcjami rzeczywistymi na X; f jest górnie półciągła i wklęsła, zaś g dolnie półciągła i wypukła. Udowodnij, że jeśli $f \leq g$, to istnieje funkcja h na X ciągła i afiniczna spełniająca $f \leq h \leq g$.
Wsk. Oprócz twierdzenia o rozdzielaniu zastosuj poprzednie zadanie.

ZADANIE 5. Niech X będzie zwartym wypukłym podzbiorem przestrzeni liniowej lokalnie wypukłej. Niech f, g będą funkcjami rzeczywistymi na X; f jest górnie półciągła i wklęsła, zaś g dolnie półciągła i wypukła. Udowodnij, że jeśli $f < g$, to istnieje funkcja h na X ciągła i afiniczna, spełniająca $f < h < g$.

ZADANIE 6. Udowodnij, że każda funkcja rzeczywista wklęsła górnie półciągła określona na podzbiorze wypukłym X ośrodkowej przestrzeni liniowo-metrycznej lokalnie wypukłej V jest równa granicy pewnego malejącego ciągu funkcji ciągłych wklęsłych.

ROZWIĄZANIE: Po pierwsze funkcja f górnie półciągła jest „lokalnie ograniczona", tzn. każdy punkt x_0 ma otoczenie, na którym f jest ograniczona. Mianowicie nierówność $f(x) < f(x_0) + 1$ jest spełniona na zbiorze otwartym (definicja górnej półciągłości) zawierającym x_0. Z własności Lindelöffa uzyskujemy przeliczalne pokrycie zbiorami otwartymi, na których f jest ograniczona. Przekrawając z tymi zbiorami bazę przeliczalną topologii otrzymamy nową przeliczalną bazę topologii, powiedzmy $\{B_n : n \geq 1\}$, taką że f jest na każdym B_n ograniczona. Z lokalnej wypukłości przestrzeni V można dodatkowo uzyskać aby zbiory B_n były wypukłe. Dla każdego n zbiór $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : x \in B_n, t > \sup\{f(x) : x \in B_n\} + \frac{1}{n}\}$ jest teraz otwartym i wypukłym podzbiorem $X \times R$, rozłącznym z domkniętym i wypukłym zbiorem $\{(x,t) \in X \times \mathbb{R} : t \leq f(x)\}$,,pod wykresem" f. Zatem istnieje funkcjonał F_n na $X \times \mathbb{R}$ rozdzielający te zbiory. Wtedy pewna poziomica tego funkcjonału jest wykresem funkcji afinicznej f_n większej równej od f i na B_n nie większej niż $\sup\{f(x) : x \in B_n\} + \frac{1}{n}$. Funkcje $h_k = \inf\{f_n : n \leq k\}$ tworzą ciąg nierosnący funkcji ciągłych wklęsłych zbiegających do wklęsłej i górnie półciągłej funkcji $h = \inf_n f_n$. Ponieważ każda $f_n \geq f$, więc też $h \geq f$. Trzeba pokazać nierówność przeciwną. Ustalmy x_0, m i niech U będzie otoczeniem x_0, na którym f nie przekracza $f(x_0) + \frac{1}{m}$. Istnieje otoczenie bazowe $B_n \subset U$, zawierające x_0, a nawet istnieje nieskończenie wiele takich otoczeń bazowych, zatem można wybrać B_n z $n \geq m$. Ale na B_n mamy $h \leq f_n \leq \sup\{f(x) : x \in B_n\} + \frac{1}{n} \leq f(x_0) + \frac{2}{m}$, stąd $h(x_0) \leq f(x_0) + \frac{2}{m}$. Ponieważ m jest dowolne, dostaliśmy $h(x_0) \leq f(x_0)$.

Tomasz Downarowicz